

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2025
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Προτεινόμενες απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 186

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161

A4. α) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 35)

β) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 26)

γ) Λ (σχολικό βιβλίο σελίδα 60)

δ) Λ (σχολικό βιβλίο σελίδα 156)

ε) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 216)

ΘΕΜΑ Β

Είναι $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$ ως

πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2\alpha x + 9$

B1. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ το οποίο είναι εσωτερικό του

$D_f = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Από Θεώρημα Fermat ισχύει

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6.$$

B2. Για $\alpha = -6$ είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η f' έχει ρίζες $x_0 = 1$ και $x_0 = 3$ οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_1 = [0, 1]$ και είναι

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1 > 0$$

Οπότε είναι $f(0) \cdot f(1) < 0$. Από θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα (γνησίως μονότονη) στο διάστημα $(0, 1)$ άρα είναι θετική.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_2 = [1, 3]$ και είναι

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1 > 0$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3 < 0$$

Οπότε είναι $f(1) \cdot f(3) < 0$. Από θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα (γνησίως μονότονη) στο διάστημα $(1, 3)$ άρα είναι θετική.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_3 = [3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα οπότε το σύνολο τιμών

της είναι το $f(A_3) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty)$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Το $0 \in f(A_3) = [-3, +\infty)$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $A_3 = [3, +\infty)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $A_3 = [3, +\infty)$ και άρα θετική.

B3.

Είναι $f''(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$

Λύνουμε την $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$ οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↪		↩

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ αφού ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2)$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$ αφού ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$

Το σημείο καμπής είναι το $A(2, f(2))$ δηλαδή το $A(2, -1)$

B4. Η συνάρτηση $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = (x + f(x))' = 1 + f'(x)$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(\xi, f(\xi))$ έχει

εξίσωση

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \quad (1)$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $B(\xi, g(\xi))$ έχει

εξίσωση

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \quad (2)$$

Είναι $g(\xi) = \xi + f(\xi)$ και $g'(\xi) = 1 + f'(\xi)$ οπότε η (2) μας δίνει

$$\begin{aligned}
 y - (\xi + f(\xi)) &= (1 + f'(\xi))(x - \xi) \Rightarrow y - \xi - f(\xi) = x - \xi + f'(\xi)(x - \xi) \\
 \Rightarrow y &= f'(\xi)(x - \xi) + x + f(\xi) \quad (3)
 \end{aligned}$$

Για $x=0$ η (1) μας δίνει $y = f'(\xi)(0 - \xi) + f(\xi) \Rightarrow y = -\xi f'(\xi) + f(\xi)$

Για $x=0$ η (3) μας δίνει $y = f'(\xi)(0 - \xi) + 0 + f(\xi) \Rightarrow y = -\xi f'(\xi) + f(\xi)$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει πως οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$ και συγκεκριμένα στο σημείο $K(0, -\xi f'(\xi) + f(\xi))$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο μηδέν καθώς ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = 1 \cdot 0 = 0 = f(0)$$

Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

ενώ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty
 \end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, οπότε δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Αναζητούμε οριζόντιες πλάγιες στο $\pm\infty$

Για το $+\infty$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

οπότε η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Για το $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

Οπότε αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0$, διότι

$$|e^x \eta\mu x| = e^x |\eta\mu x| \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta\mu x \leq e^x$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$ και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0$.

Συνεπώς, η $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ3. Αρκεί η εξίσωση $e^x \eta\mu x = x + \frac{1}{2}$ να έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(-\pi, 0)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x \eta\mu x - x - \frac{1}{2}$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$ και ισχύουν:

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^0 \cdot 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ έτσι ώστε $g(\xi) = 0$ απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Γ4. Ισχύει $y = f(x)$ για $x \geq 0$ με $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ όπου $x = x(t)$ και $y = y(t)$ και $t \geq 0$

Ισχύει ότι $x'(t) > 0$.

$$\text{Είναι } y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)} \text{ και } y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (x^2(t) + x(t))' = \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Αναζητείται λύση της εξίσωσης: $y'(t) = x'(t)$

$$y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \stackrel{x'(t) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{2x(t) + 1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \stackrel{x(t) \geq 0}{\Leftrightarrow} 4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4x^2(t) + 4x(t) \Leftrightarrow 1 = 0$$

το οποίο είναι αδύνατο. Συνεπώς δεν υπάρχει τέτοιο $t_0 > 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Είναι $x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$

Δ1. Παρατηρούμε ότι για $x > 0$, η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (e^{\ln^2 x})'}{(x^{\ln x})^2} = \\ &= \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \\ &= \frac{x^{\ln x} \left(f(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x} \right)}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{x^{\ln x}} = \frac{x \cdot f(x) - F(x) \cdot 2 \ln x}{x \cdot x^{\ln x}} = 0 \end{aligned}$$

Γιατί από την υπόθεση έχουμε πως ισχύει $x \cdot f(x) = F(x) \cdot 2 \ln x$, $x > 0$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.



Δ2. i. Ισχύει $x \cdot f(x) = F(x) \cdot 2 \ln x$, $x > 0$ οπότε για $x=1$ έχουμε $1 \cdot f(1) = F(1) \cdot 2 \ln 1 \Rightarrow f(1) = 0$

Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$ ισχύει $f'(1) = 2$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x - \ln 1}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2 \text{ από τον ορισμό της παραγώγου στο } x_0 = 1$$

$$\text{Ακόμα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{Τελικά έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{2}{1} = 2$$

ii. Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ οπότε ισχύει $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x)$

$$\text{Είναι } x \cdot f(x) = F(x) \cdot 2 \ln x, \quad x > 0 \text{ οπότε } F(x) = \frac{x \cdot f(x)}{2 \ln x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \text{ και}$$

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

iii. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x > 0$ είναι σταθερή οπότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow F(x) = c \cdot x^{\ln x}, \quad x > 0$$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } F(1) = c \cdot 1^{\ln 1} \Rightarrow F(1) = c \Rightarrow 1 = c$$

Τότε είναι

$$\mathbf{\Delta 3.} \text{ Είναι } F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}, \quad x > 0$$

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot x^{\ln x - 1} \cdot \ln x, \quad x > 0$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^{\ln x - 1} \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^{\ln x - 1} \cdot \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Προφανώς μια λύση της δοθείσας εξίσωσης $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ είναι η $x=1$ αφού έχουμε

$$F(1) = F(1) - (1-1)^2 \Leftrightarrow 0 = -(1-1)^2 \Leftrightarrow 0 = 1-1 \Leftrightarrow x=1$$

Αν $0 < x < 1$, έχουμε $0 < x^2 < x < 1$, οπότε, λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης F , έχουμε $F(x^2) > F(x)$ ενώ αν $x > 1$, έχουμε $x^2 > x > 1$ έχουμε $F(x^2) > F(x)$.

Σε κάθε περίπτωση, αν $0 < x \neq 1$, τότε $F(x) - F(x^2) < 0 \leq (x-1)^2$. Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=1$.

Δ4.

Αφού $F(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $e^x \geq x+1 > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 E &= \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e x' \cdot (\ln^2 x) dx = \left[x \cdot \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx = \\
 &= e \cdot \ln^2 e - 1 \cdot \ln^2 1 - 2 \int_1^e x' \cdot \ln x dx = e \cdot 1 - 2 \left(\left[x \cdot \ln x \right]_1^e - \int_1^e 1 dx \right) = e - 2(e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1) + 2 \left[x \right]_1^e = \\
 &= e - 2e + 2e - 2 = e - 2 > 2e - 3
 \end{aligned}$$